

Olimpiada de matematică – clasa a IX-a
etapa zonală – 11 februarie 2012

1. Între cifrele numărului natural \overline{ab} se scrie o a treia cifră. Media aritmetică a numărului de trei cifre astfel obținut și a numărului \overline{ab} este exact numărul \overline{ba} . Să se determine numărul \overline{ab} .

2. Arătați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ au loc egalitățile $\frac{\{x\}}{2} = \frac{\{x\}}{2}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

3. Demonstrați că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sunt numere reale strict pozitive, atunci:

a) $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n}$;

b) $\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} > 1$.

4. Fie M, N mijloacele laturilor BC, CD ale paralelogramului $ABCD$ și P intersecția dreptelor AM și BN . Arătați că $\frac{PM}{AM} + \frac{2BP}{BN} = 1$.

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7

Csápó Hajnalka, Páll Olga, Tamási Csaba